
El reto de enseñar a demostrar Geometría

The challenge of teaching to demonstrate Geometry

Carlos Beltrán-Pazo; Risel Ruiz-Cordobés; Roberto Carlos Castellanos-Torres

Universidad de Guantánamo, Cuba

Correo(s) electrónico(s)

beltranpazo@gmail.com

riselrc@cug.co.cu

robertoct@cug.co.cu

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4049-2890>

<https://orcid.org/0000-0001-6847-1878>

<https://orcid.org/0000-0002-4134-1165>

Recibido: 25 de marzo de 2020

Aceptado: 26 de noviembre de 2020

Resumen

Aprender a demostrar proposiciones matemáticas es difícil para el estudiante, como para el profesor de Matemática enseñar las demostraciones, es una realidad de la praxis. Pero, ¿por qué? En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, están dadas las condiciones para garantizar el éxito en este empeño, ¿o no? Este trabajo aborda algunas aristas que se observan en todo este proceso, demostrar, enseñar a demostrar en la escuela, y propone una salida didáctica, que si bien no pretende agotar el tema, procura esclarecer el actuar de los docentes al enfrentar esta tarea en el caso concreto de la Geometría.

Palabras clave: Geometría; Demostración en geometría; Enseñanza de la geometría; Enseñanza-aprendizaje de la Matemática

Summary Abstract

Learning to demonstrate mathematical propositions is difficult for the student, as it is for the mathematics teacher to teach the demonstrations; it is a reality of practice. But why? In the teaching-learning process of Mathematics, the conditions are given to guarantee success in this endeavor, or not? This work deals with some aspects that can be observed in this whole process, demonstrating, teaching to demonstrate at school, and proposes a didactic solution, which, although it does not pretend to exhaust the subject, tries to clarify the teachers' actions when facing this task in the specific case of Geometry.

Keywords: Geometry; Demonstration in Geometry; Teaching of Geometry; Teaching-learning of Mathematics

Introducción

Hoy es una necesidad de la formación del estudiante, concebir, formar, desarrollar y evaluar sus competencias en el antes, el durante y el después a la hora de resolver cualquier ejercicio de demostración matemática, que a los efectos de este artículo, y siguiendo los cánones de la Didáctica de la Matemática actual, llamaremos proposiciones matemáticas. Una justificación de esa necesidad redunda en las posibilidades que se tiene, al demostrar proposiciones matemáticas, de formal un pensamiento lo más formal posible, con las ventajas que esto implica.

Y esto es cierto: demostrar en Matemática contribuye a crear un pensamiento concreto, pero bastante formal. La cuestión ahora estriba no solo en determinar cuánto de formalidad se necesita en un estudiante al concluir el nivel medio, sino también, en quién determina esa formalidad. La segunda cuestión queda clara: es un asunto más bien curricular, depende del programa, de las orientaciones metodológicas, etc.

El primer elemento no está tan claro. En efecto, en el proceso de aprender a demostrar por el estudiante, y de enseñar a demostrar por el profesor de Matemática se dan situaciones de aula que describen *soluciones didácticas* del profesor a su a veces injustificada *incompetencia* para demostrar y enseñar a demostrar en Matemática, que a continuación se resumen sin más comentarios.

Empleo excesivo de redundancias, repeticiones, comparaciones y otras analogías que supuestamente hacen memorizar los procedimientos propios de las demostraciones.

Explicaciones, representaciones, ejemplificaciones y comentarios a través de los cuales intentará vincular los conocimientos de los estudiantes a las de su exposición matemática axiomatizada.

Empleo en ocasiones, de inapropiados recursos didácticos destinados a combatir una de sus numerosas inadecuadas tendencias de aula:

- Hablar: lo que impide al estudiante hacerlo él mismo.
- Hacer hablar al estudiante en vez de hacerle actuar.
- Enseñar en vez de dejar al estudiante desarrollarse de acuerdo con su desarrollo espontáneo.
- A construir el saber según la cultura del profesor en vez de dejar al estudiante construir su saber en toda creatividad.
- Concentrar sobre sí mismo la atención del estudiante en vez de devolverlo a la influencia

beneficiosa de pequeños grupos que trabajan libremente.

Desarrollo

Estas cuestiones explican el auge que en los últimos años tiene como tendencia, desde la Didáctica de la Matemática, el proceso de formular, demostrar y aplicar teoremas, solo que al margen del formalismo que exige la ciencia Geometría, lo que queda bien justificado, pues ha de considerarse al proceso de demostración matemática, en condiciones de aula, como un caso singular de argumentación matemática de la veracidad de las proposiciones (expresadas en teoremas o ejercicios de demostración).

Pero la realidad muestra que nuestros estudiantes aún no saben demostrar proposiciones matemáticas, y que los profesores de la Disciplina presentan limitaciones para enseñar los procedimientos correspondientes, lo que se justifica, sin embargo, los esfuerzos de clarificación realizados en el campo sobre la propia noción de demostración matemática, sus distintas tipologías y relaciones mutuas son insuficientes. Hoy prevalece la idea de demostración, entendida de un modo rígido y absoluto en el seno de la comunidad matemática, parece como la única concepción posible y digna de tenerse en cuenta.

Justamente este trabajo procura analizar las diferencias de significado de la idea de demostración, pasando y clarificando conceptos como demostración matemática, conjeturar en situaciones de aula, abordando, además, algunas aristas que se observan en todo este proceso de demostrar y de enseñar a demostrar en la escuela según han estudiado Ballester (1992), Godino (1997) y Beltrán (2015), y propone una salida didáctica, que si bien no pretende agotar el tema, procura esclarecer el actuar de los docentes al enfrentar esta tarea en el caso concreto de la Geometría.

Algunas falacias en el proceso de demostración matemática

I. Los ejemplos y el contraejemplo

Este es un caso importante de elementos tomados para una demostración matemática a partir de ejemplos que verifican el cumplimiento de la propiedad.

A los estudiantes del 5° año de la carrera de Matemática y Física se les preguntó: ¿Cuántos ejemplos serán necesarios para demostrar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180° ?

Las respuestas fueron varias, oscilando entre *tres* y *hasta muchos*. El razonamiento común es que Si

para uno funciona, funciona para todos. Esta falacia es reconocida por Álvarez (2011). La siguiente pregunta a estos mismos estudiantes fue: ¿Si para uno no funciona?

La salida a situaciones de este tipo en la clase, es la demostración de la falsedad de proposiciones a partir de algún contraejemplo.

En el ejemplo anterior, la proposición propuesta es verdadera, y es reconocida por todos como un teorema. La cuestión es menos evidente cuando se trata de conjeturas, o proposiciones no declaradas como teorema.

Un ejemplo de este tipo de situaciones que se pueden tratar en las clases de Matemática, puede ser: Sea el polinomio $p(n) = n^2 + n + 41$.

n	1	2	3	4	5	6	7	...	40
$n^2 + n + 41$	43	47	53	61	71	83	97	...	$1681 = 41^2$

¡Todos son números primos!

¿?

Como se puede comprobar, para los números $n = 40$ y $n = 41$, los resultados que se obtienen son números compuestos. Debe abordarse con los estudiantes el hecho de que para $n = 42$, el polinomio dado vuelve a ser un número primo.

La intuición, la inducción y la deducción

La intuición es un concepto básico de la Teoría del conocimiento y aplicado en la epistemología que se describe como aquel conocimiento que es directo e inmediato, sin intervención de la deducción o del razonamiento, siendo habitualmente considerado como evidente. Un primer problema con esto es: ¿qué es lo evidente?, ¿cómo saber que algo es cierto por evidente?

Por otro lado la intuición analizada desde la perspectiva de la lógica no conduce a un resultado necesariamente falso o falaz aunque el modo de razonamiento con el que se ha llegado a este puede que si lo sea. El no conocer el modo de razonamiento nos hace entrar en la falacia *ad ignorantiam* (prejuicio cognitivo) impidiendo saber si el método que realiza nuestro cerebro inconscientemente es correcto o no.

Esto es así, puesto que el saber cómo se ha llegado al resultado permite la sistematización, automatización y verificación del patrón de razonamiento. Una vez conocido este patrón se puede

probar y verificar si es cierto para todos los casos. La verificación es muy importante ya que permite evitar el auto-engaño y aproximarse a la verdad. De esta forma se pasa de la intuición a la deducción.

La intuición es comprensión sintética, es el primer indicio de una profunda unificación subjetiva. La manera más útil de desarrollar la intuición es mediante la interpretación de los símbolos. A veces, el carácter propedéutico de la educación primaria confunde a profesores y a estudiantes en la demostración de propiedades. Es el criterio de muchos que *en estas edades* las demostraciones no deben ser rigurosas. Y no tienen razón. La construcción formal de la Matemática no puede estar basada en la intuición. De muchos errores se componen nuestros textos. Un ejemplo, Matemática 3º, pág. 146: Señala las figuras que tengan dos lados iguales

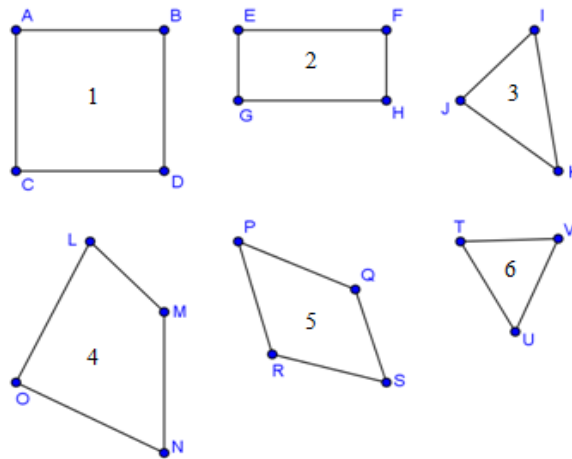


Figura 1. Ejercicio tomado del Libro de Texto Matemática 3, página 146.

Si bien no se niega el papel que juega la intuición en la formación de los primeros conceptos matemáticos, como parte de los niveles sensorial, representativo, e incluso racional de la actividad cognitiva instrumental de la personalidad, abusar de ello o incurrir en algunas prácticas no rigurosas, deja mucho que decir de la actividad matemática y su carácter deductivo que se desarrolla en ocasiones.

Una situación más favorable se consigue a base de la inducción, pero sin los excesos que se cometen a veces en las clases de Matemática.

El razonamiento inductivo es el tipo de razonamiento en que la verdad de las premisas brinda apoyo a la verdad de la conclusión, *pero no la garantiza*. Justamente esta última parte de la afirmación, es la más importante, y la que más trabajo cuesta en las clases de Matemática. El hecho de que no se

garantiza la verdad en cuestión, es la invitación a demostrarla.

Rara vez se observa en las clases de Matemática la demostración del teorema que refiere que la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo, es igual a 180° ; más raro aún es demostrar que la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la longitud de su hipotenusa (Teorema de Pitágoras). A los mismos estudiantes de 5° año se les preguntó: Enuncie y demuestre uno de los teoremas que usted demuestra en sus clases de Matemática en la escuela. Sólo uno de ellos pudo recordar un teorema, y no pudo demostrarlo. En otra ocasión se les pidió que enunciaran y demostraran el Teorema de Pitágoras. Aquí los errores fueron dos: no recuerdan con el rigor que se exige el enunciado, y ninguno es capaz de al menos iniciar una demostración del mismo.

Una razón para esta situación radica en que en la mayoría de los casos, se apela a la inducción exagerada del concepto o la propiedad, y en muy pocos casos se demuestra el resultado en cuestión.

Los autores de esta investigación no creen que sea pertinente la axiomatización absoluta de la ciencia o de su enseñanza como premisas para asegurar su carácter deductivo. Un sistema axiomático es la forma acabada que toma hoy una teoría deductiva. Es un sistema donde todos los términos u objetos no definidos y las proposiciones no demostradas se enuncian explícitamente, siendo estas últimas, fijadas como hipótesis a partir de las cuales pueden construirse las demás proposiciones del sistema, siguiendo unas reglas lógicas perfecta y expresamente determinadas. El encadenamiento lógico que se hace a partir de las hipótesis, constituye la demostración. La necesidad de términos no definidos y proposiciones no demostradas se debe a que es imposible llevar la definición y la demostración indefinidamente.

Este es un buen punto. No se pretende que *todo sea demostrado*. Es que eso resulta verdaderamente imposible, más aún en el ámbito de un programa de estudio. Se alerta en todo caso que tampoco es correcto no demostrar nada, y dejarlo todo a la intuición o al empleo de métodos puramente inductivos. Mediante la demostración, se establecen nuevas proposiciones o relaciones entre los objetos a partir de las relaciones dadas como axiomas; luego se hace necesario nombrar o definir los nuevos objetos que verifican estas propiedades.

El carácter demostrativo del gráfico o la figura

Un problema que se presentan hoy en las clases de Matemática, no importa al nivel que sea, radica en

el valor de verdad que se asocia a la figura, como argumento demostrativo de cierta propiedad por docentes y estudiantes de Matemática.

Baste un ejemplo: ABCD es un paralelogramo, y E es un punto del lado AD. Clasifique el triángulo BCE según sus lados.

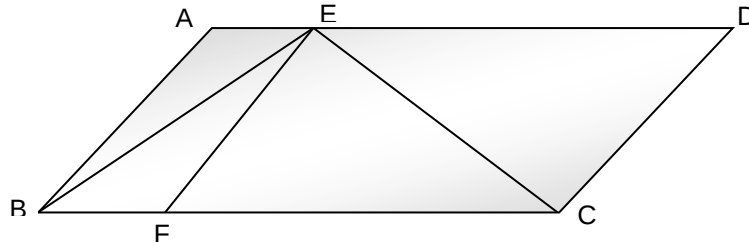


Figura 2. Ejercicio de clasificación de figura, lo que implica una demostración de la propiedad.

Bajo ciertas condiciones, que incluye que el segmento EF sea paralelo al segmento AB, los segmentos BE y EC son iguales, por tanto el triángulo dado es isósceles de base BC, y no escaleno como *parece*. Solo se agrega a este tópico que el carácter demostrativo de la figura es nulo. Si bien es un apoyo a la demostración de cualquier propiedad, concluir que esta es válida, *como se muestra en la figura* es falso.

¿Qué hacer entonces?

A. Lo primero: Pertrecharse de una teoría.

Una primera propuesta se puede observar a partir de estudiar fragmentos del texto, *Análisis Matemático*. Volumen I de J. R. Pastor.

Dado el teorema " $H \Rightarrow P$ " hay varios teoremas relacionados con él. Dos se llaman *recíprocos*, cuando cada uno tiene como hipótesis la tesis del otro; se llaman *contrarios* los que tienen como hipótesis y tesis proposiciones respectivamente contrarias (H y $\text{no} - H$, T y $\text{no} - T$).

He aquí indicados el teorema dado (llamado directo) y además el recíproco, el contrario y el recíproco del contrario (o contrario del recíproco), que llamaremos *contrarrecíproco*.

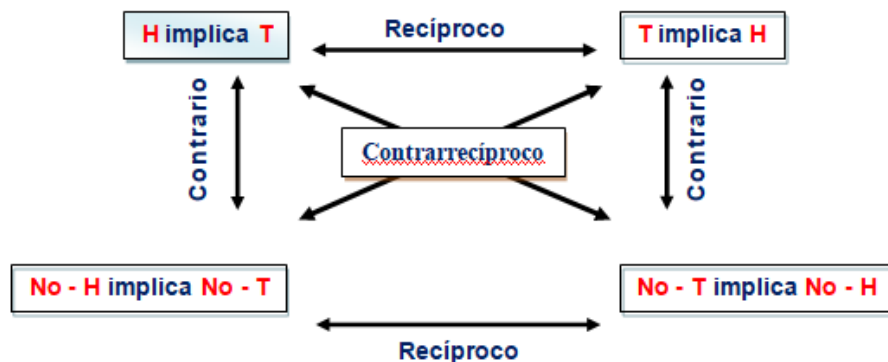


Figura 3. Relaciones entre el teorema directo y sus componentes: tesis e hipótesis.

Un error muy común en las clases de Matemática, y lamentablemente casi a cualquier nivel de enseñanza, es el declarar o asumir como válido el recíproco de cualquier teorema sin previa demostración. Esto se manifiesta por el desconocimiento de la siguiente afirmación: La validez de un teorema no implica la de su recíproco, como puede verse en los diagramas de la figura 1, en las cuales los círculos representan las extensiones de los conjuntos definidos por las proposiciones H y T.

El teorema directo expresa que H es *suficiente* para que se cumpla T; el recíproco dice que H es necesario para que se cumpla T. Si son válidos ambos teoremas, directo y recíproco, entonces H y T son equivalentes ($H = T$), y se dice que H es condición necesaria y suficiente para que se cumpla T. Así ocurre en el ejemplo: H: “El triángulo ABC es equilátero”; T: “El triángulo ABC es equiángulo”.

El método de razonamiento que consiste en probar el teorema directo valiéndose del contrarrecíproco, se llama *al absurdo por reducción*; es decir, que para demostrar que “H implica T”, se acepta la falsedad de T (no-T), y de ella se deduce la falsedad de H (no-H).

Se insiste en un detalle: las proposiciones matemáticas se demuestran en forma deductiva. Ningún resultado matemático puede considerarse válido, si no ha sido deducido de las proposiciones de partida. La familiarización con los mecanismos de demostración utilizados en la matemática constituye un aspecto básico para comprender una demostración matemática. Dos situaciones deductivas corrientes en la actividad matemática lo constituyen la búsqueda y el análisis de la demostración de una proposición.

B. Lo segundo: Pertrecharse de un procedimiento.

Polya (1989), hace consideraciones en cuanto a la clasificación de los problemas que enfrentan los estudiantes en el proceso de enseñanza- aprendizaje de la asignatura Matemática, por la importancia del tema, destacamos a continuación su clasificación. Según este autor se debe considerar que los problemas se dividen en problemas por resolver y problemas por demostrar. En los problemas por resolver el propósito es descubrir cierto objeto, la incógnita del problema, es decir, lo que se busca o lo que se pide.

Ofrece también, un listado de preguntas y sugerencias que guían la solución de los problemas por resolver y de los problemas por demostrar, que más adelante se describen en este material.

En los *problemas por demostrar*, el propósito consiste en mostrar de modo concluyente la exactitud o falsedad de una afirmación claramente enunciada.

En este apartado, el profesor debe tener en cuenta los siguientes elementos que rigen su modo de actuación al enfrentar a los estudiantes a la solución de los ejercicios. Estos, según los autores de esta ponencia, son 6, a saber:

1. Reformular la proposición de manera implicativa: si..., entonces...

Esto se garantiza a partir del reconocimiento “simple” de la premisa y la tesis, en lo que el profesor de Matemática debe trabajar con sus estudiantes. Se debe abordar continuamente con los estudiantes ejercicios de traducción de lenguaje, y cada uno de estos ejercicios de demostración, debe tratarse con sumo cuidado, hasta ir formando en ellos las habilidades correspondientes para leer un ejercicio por demostrar como un teorema.

II. Determinar el tipo de demostración

- **Demostración directa:** Se parte de la premisa de la proposición a demostrar, se aplican reglas de inferencia lógica, se obtiene la tesis.

Tabla 1. Esquema didáctico para una demostración directa.

Teorema $A \rightarrow B$	
Premisa: A	Tesis: B

Demostración
Suponemos que A es válida
Inferimos utilizando teoremas, definiciones, reglas lógicas, hasta que:
Se obtiene B
Luego resulta que
si A entonces B

- **Demostración indirecta:** Es verdadera la negación lógica de la proposición a demostrar y se verifica que esta suposición conduce a una contradicción.

Tabla 2. Esquema didáctico para una demostración indirecta.

Teorema $A \rightarrow B$	
Premisa: A	Tesis: B
Demostración Suponemos que no es cierto que $A \rightarrow B$ Esto equivale a suponer que A es cierta y B no lo es. Inferimos utilizando teoremas, definiciones y reglas lógicas, hasta que: Surge una contradicción La contradicción indica que nuestra suposición es falsa, luego resulta que Si A, entonces B	

III. Búsqueda de una idea y un plan de demostración

La búsqueda de la demostración se inicia con la motivación de su necesidad. Algunos de los argumentos, para despertar en los estudiantes el interés por probar la veracidad de una proposición dada, se basan en:

- Error de medición.

- Aberraciones ópticas.
- Exigencias de recíprocos falsos de proposiciones verdaderas.
- Formulación de una proposición universal, después de analizar un número limitado de casos.

Seguidamente se dirige la atención al análisis de lo que se desea demostrar. El primer paso es la comprensión del enunciado de la proposición. Algunas de las acciones que contribuyen a este particular pueden ser:

- ¿La proposición está formulada de forma implicativa?
- ¿Cuáles son sus premisas?
- ¿Cuál es la tesis?
- ¿Puedes construir una figura de análisis?
- ¿Será necesario reformular la proposición?

De igual manera resulta importante, precisar el campo de búsqueda:

- ¿En qué unidad de materia se ubica la proposición?
- ¿Qué contenidos se estudiaron con anterioridad?
- ¿Conoces las definiciones de los conceptos mencionados en la proposición?
- ¿Han sido estudiadas otras proposiciones con premisas y tesis similares a las de esta?

IV. Selección de los procedimientos especiales de demostración

- Demostración por construcción de ejemplos o contraejemplos.

Supóngase que se desea refutar la proposición siguiente:

Si dos cuerdas de una circunferencia son iguales, entonces son paralelas.

Basta encontrar un contraejemplo: Dos diámetros diferentes, son dos cuerdas iguales, sin embargo, se cortan.

- Demostraciones a través de contrarrecíproco

Tómese, por ejemplo, la proposición: Si ABCD es un paralelogramo, entonces sus lados opuestos son paralelos

Recíproco

Si los lados opuestos de un cuadrilátero ABCD son paralelos, entonces ABCD es un paralelogramo

Contrarrecíproco

Si los lados opuestos del cuadrilátero ABCD no son paralelos, entonces ABCD no es paralelogramo

Demostrando de manera directa el contrarrecíproco se llega a probar la validez de la proposición original. Partiendo de la hipótesis, si el cuadrilátero ABCD no tiene los lados opuestos paralelos, por definición es un trapecioide, lo que demuestra que ABCD no es un paralelogramo.

V. Exposición comprensible de la demostración

Para resolver el problema de la representación, podemos apoyarnos en una sucesión de indicaciones como la siguiente (en el caso de demostraciones directas):

- Escribe las premisas.
- Escribe la tesis.
- Dibuja una figura de análisis en el caso necesario.
- Escriba en un orden adecuado todas las conclusiones que conducen de la premisa a la tesis. Al final debe aparecer la tesis.
- Verifica las inferencias y escribe las fundamentaciones necesarias.

VI. Evaluación de la demostración.

En la última fase de la representación de la demostración, se debe evaluar su resultado. Entre otras se deben responder las siguientes preguntas:

- ¿Contiene la representación todos los pasos esenciales para la comprensión de la demostración?
- ¿Están escritas las fundamentaciones indispensables?
- ¿Es correcta la demostración desde el punto de vista lógico?
- ¿Está expresada en un lenguaje adecuado?

Conclusiones

La familiarización con los mecanismos de demostración utilizados en la Matemática constituye un aspecto básico para comprender una demostración matemática.

La esencia de enseñar a demostrar en la asignatura Matemática radica en escalar racionalmente elementos de la intuición, la inducción, conjeturar, buscar el teorema, demostrarlo. Ninguno de estos elementos por separado garantiza un proceso de enseñanza - aprendizaje de la demostración favorable para el desarrollo de habilidades. De igual manera el abuso en el empleo de elementos intuitivos o inductivos lastra ese aprendizaje de la demostración que tanto necesita el estudiante.

Referencias bibliográficas

Álvarez, P. M. (2011). *Las causas de los errores en la enseñanza de la Matemática*. La Habana.

Ballester, S. (1992). *Metodología de la enseñanza de la Matemática* (Tomo I). La Habana: Pueblo y Educación.

Beltrán, C. (2015). *Una tarea del profesor de Matemática*. Enseñar a demostrar. Revista EDUSOL. Recuperado de <http://edusol.cug.co.cu/index.php/EduSol>

Godino, J. y Recio, A. (1997). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las ciencias*, 19(3), 405-410.

Pastor, J. R. (1963). *Análisis Matemático. Análisis algebraico. Teoría de ecuaciones. Cálculo infinitesimal de una variable*. (Vol. I). La Habana: Edición Revolucionaria.

Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. México. Editorial Trillas.